Réduction : que les théorèmes

E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une matrice

- Si F stable par f, alors f_F induit un endomorphisme de F et réciproquement.
- Une droite stable par f est une droite engendrée par un vecteur propre de f.
- Si $E = F \oplus G$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E adaptée à cette décomposition, F est stable par $f \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

THÉORÈME. Soit $(f, g) \in (\mathscr{L}(E))^2$. Si $f \circ g = g \circ f$, alors $\text{Im}(f)$, $\text{Ker}(f)$ et plus généralement tous les $\text{Ker}\,(f - \lambda \text{Id}_E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, sont stables par g.

Sommes de plusieurs sous-espaces, sommes directes

THÉORÈME. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.

THÉORÈME. **1)** La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ F_i \cap \displaystyle\sum_{j \neq i} F_j = \{0\}$.

2) La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe $\Leftrightarrow \forall i \in [\![2, p]\!],\ F_i \cap \displaystyle\sum_{j < i} F_j = \{0\}$.

THÉORÈME. On suppose de plus que $\dim(E) < +\infty$.

1) $\dim\left(\displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$

2) $\dim\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

3) $E = \displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i \Leftrightarrow \dim(E) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

THÉORÈME. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, soit $\mathscr{B}_i = (e_{1,i}, e_{2,i}, \ldots, e_{n_i,i})$ une base de F_i puis $\mathscr{B} = (e_{1,1}, e_{2,1}, \ldots, e_{n_1,1}, e_{1,2}, e_{2,2}, \ldots, e_{n_2,2}, \ldots, e_{1,p}, e_{2,p}, \ldots, e_{n_p,p})$.

Alors, $E = \displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i \Leftrightarrow \mathscr{B}$ est une base de E.

THÉORÈME. Soient $F_1, \ldots, F_p$, p sous-espaces supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E)$. Alors

1) $f = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ f_{/F_i} = 0$.
2) $f = g \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ f_{/F_i} = g_{/F_i}$.

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

THÉORÈME. Un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle n a au au moins une valeur propre. Une matrice carrée a au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$.

THÉORÈME. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie n a au plus n valeurs propres. Une matrice carrée de format n a au plus n valeurs propres.

- $0 \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \exists x \neq 0 /\ f(x) = 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(f) \neq \{0\} \Leftrightarrow f$ non injectif (non bijectif si de plus $1 \leqslant \dim(E) < +\infty$).
$\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \exists x \neq 0 /\ f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}) \neq \{0\} \Leftrightarrow f - \lambda \text{Id}$ non injectif (non bijectif si de plus $1 \leqslant \dim(E) < +\infty$).
$0 \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \exists X \neq 0 /\ AX = 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(A) \neq \{0\} \Leftrightarrow A \notin GL_n(\mathbb{K})$.

$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \exists X \neq 0/\ AX = \lambda X \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$.
• Si $f(x) = \lambda x$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$. Si $AX = \lambda X$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$.

Théorème. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Théorème. $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda Id_E)$ est un sous-espace de E.
$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ est un sous-espace de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Théorème. Une somme d'un nombre fini de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.

Endomorphismes ou matrices diagonalisables

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis f un endomorphisme de E.
f est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de f.

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle puis f un endomorphisme de E. Soient λ_1, ..., λ_p, les éventuelles valeurs propres deux à deux distinctes de f. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on pose $n_i = \dim(E_{\lambda_i})$.

Alors, f est diagonalisable si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i = n$.

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$.

Si f a n valeurs propres deux à deux distinctes, **alors** f est diagonalisable. De plus, dans ce cas, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Polynôme caractéristique

Théorème. Si $A = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $\chi_A = (X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_n)$.

Théorème. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0.$$

Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\deg(\chi_A) = n$ et $\mathrm{dom}\,(\chi_A) = 1$ (χ_A est unitaire de degré n).

Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A admet au plus n valeurs propres (en tenant compte de l'ordre de multiplicité).

Si de plus $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, alors A admet exactement n valeurs propres (en tenant compte de l'ordre de multiplicité).

Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\chi_A = X^n - (\mathrm{Tr}(A))\,X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A)$.

En particulier, pour $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, $\chi_A = X^2 - (\mathrm{Tr}(A))\,X + \det(A)$.

Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de A.

$$\chi_A = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \ldots + (-1)^k \sigma_k X^{n-k} + \ldots + (-1)^n \det(A)\sigma_n.$$

où $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, $\sigma_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et plus généralement, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\sigma_k = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k}$.

En particulier,

$$\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \text{ et } \det(A) = \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_n.$$

Théorème. $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{{}^tA} = \chi_A$.

$\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Diagonalisation

THÉORÈME. On note $o(\lambda)$ l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ.

• Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit λ une (éventuelle) valeur propre de f. Alors, $1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant o(\lambda)$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit λ une (éventuelle) valeur propre de A. Alors, $1 \leqslant \dim(E_\lambda(A)) \leqslant o(\lambda)$.

THÉORÈME. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit λ une (éventuelle) valeur propre simple de f. Alors, $\dim(E_\lambda(f)) = 1$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit λ une (éventuelle) valeur propre simple de A. Alors, $\dim(E_\lambda(A)) = 1$.

Ainsi, le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est toujours une droite vectorielle.

THÉORÈME. (Une condition nécessaire et suffisante de diagonalisablité)

• Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.

THÉORÈME. (une condition suffisante de diagonalisablité)

• Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. **Si** f a n valeurs propres simples, **alors** f est diagonalisable. De plus, les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. **Si** A a n valeurs propres simples, **alors** A est diagonalisable. De plus, les sous-espaces propres de A sont des droites vectorielles.

Endomorphismes ou matrices trigonalisables

THÉORÈME. Si $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $\chi_T = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_n)$.

THÉORÈME. (une condition nécessaire et suffisante de trigonalisablité)

• Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

En particulier,

• Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle est trigonalisable.

• Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est trigonalisable.

Quand on a triangulé et donc écrit A sous la forme $A = PTP^{-1}$, on retrouve sur la diagonale de T la famille des valeurs propres de A.

THÉORÈME. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Sp}\left(A^k\right) = \left(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\right).$$

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Sp}\left(A^k\right) = \left(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\right).$$

THÉORÈME. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}\left(A^k\right) = \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k.$$

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Tr}\left(A^k\right) = \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k.$$

Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrices

L'algèbre des polynômes en f (ou en A)

THÉORÈME.

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$.
  $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ (P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$;
  $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda P)(f) = \lambda P(f)$;
  $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ (P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ (P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$;
  $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda P)(A) = \lambda P(A)$;
  $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ (P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$.

Par exemple, si $P = (X - 1)^2(X + 2) + 3X - 1$, alors $P(f) = (f - \mathrm{Id}_E)^2 \circ (f + 2\mathrm{Id}_E) + 3f - \mathrm{Id}_E$.

THÉORÈME.

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$. De plus, l'application $\varphi_f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathscr{L}(E) \\ P & \mapsto & P(f) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$. De plus, l'application $\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \mapsto & P(A) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.

THÉORÈME. Deux polynômes en f commutent.

Commutant d'un endomorphisme ou d'une matrice

THÉORÈME.

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. $C(f)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $C(A)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$.

THÉORÈME.

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(C(f), +, ., \circ)$.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(C(A), +, ., \times)$.

Polynômes annulateurs d'un endomorphisme (ou d'une matrice)

THÉORÈME.

- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(f) = 0$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(A) = 0$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

Polynôme minimal d'un endomorphisme (ou d'une matrice)

THÉORÈME.

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Il existe au moins un polynôme non nul P tel que $P(f) = 0$.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe au moins un polynôme non nul P tel que $P(A) = 0$.

THÉORÈME.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Il existe un polynôme unitaire P_0 et un seul tel que

$$\operatorname{Ker}(\varphi_f) = P_0 \times \mathbb{K}[X].$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe un polynôme unitaire P_0 et un seul tel que

$$\operatorname{Ker}(\varphi_A) = P_0 \times \mathbb{K}[X].$$

Polynôme minimal et polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

THÉORÈME.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient F un sous-espace vectoriel de E stable par f puis f_F l'endomorphisme de F induit par f. Alors

- χ_{f_F} divise χ_f ;
- μ_{f_F} divise μ_f.

Le théorème de Cayley-Hamilton

THÉORÈME. (théorème de Cayley-Hamilton)

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors $\chi_f(f) = 0$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_A(A) = 0$.

ou aussi

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors μ_f divise χ_f.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors μ_A divise χ_A.

Polynômes annulateurs et valeurs propres

THÉORÈME.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $f(x) = \lambda x$. Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)(x) = P(\lambda)x$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $AX = \lambda X$. Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)X = P(\lambda)X$.

THÉORÈME.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f. Alors, pour toute valeur propre λ de f, on a $P(\lambda) = 0$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A. Alors, pour toute valeur propre λ de A, on a $P(\lambda) = 0$.

On retiendra

les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur.

Théorème.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit donc

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où les λ_i sont les valeurs propres deux à deux distinctes de f et les α_i sont des entiers naturels non nuls. Alors μ_f s'écrit

$$\mu_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit donc

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où les λ_i sont les valeurs propres deux à deux distinctes de A et les α_i sont des entiers naturels non nuls. Alors μ_A s'écrit

$$\mu_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

Le théorème de décomposition des noyaux

Théorème.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient P et Q deux polynômes **premiers entre eux**.

$$\mathrm{Ker}\left((P \times Q)(f)\right) = \mathrm{Ker}(P(f)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(f)).$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient P et Q deux polynômes **premiers entre eux**.

$$\mathrm{Ker}\left((P \times Q)(A)\right) = \mathrm{Ker}(P(A)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(A)).$$

Plus généralement,

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux**.

$$\mathrm{Ker}\left((P_1 \times \ldots \times P_k)(f)\right) = \mathrm{Ker}\left(P_1(f)\right) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(f)).$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux**.

$$\mathrm{Ker}\left((P_1 \times \ldots \times P_k)(A)\right) = \mathrm{Ker}\left(P_1(A)\right) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(A)).$$

Théorème.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux** puis $P = P_1 \times \ldots \times P_k$. On suppose de plus que P est annulateur de f.

$$E = \mathrm{Ker}\left(P_1(f)\right) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(f)).$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux** puis $P = P_1 \times \ldots \times P_k$. On suppose de plus que P est annulateur de A.

$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}\left(P_1(A)\right) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(A)).$$

Une caractérisation de la diagonalisabilité

THÉORÈME.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$.
f est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme P non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples tel que $P(f) = 0$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme P non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples tel que $P(A) = 0$.

ou aussi

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$.
f est diagonalisable si et seulement si μ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est diagonalisable si et seulement si il existe μ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

On résume les différentes conditions nécessaires et suffisantes ou simplement suffisantes de diagonalisabilité ou de trigonalisabilité pour un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Dans ce qui suit, n est la dimension de E, les α_i sont les ordres de multiplicité des valeurs propres et les n_i sont les dimensions des sous-espaces propres associés.

f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f
$\Leftrightarrow$ il existe une base de E telle que $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale
$\Leftrightarrow$ E est somme directe des sous-espaces propres de f
$\Leftrightarrow n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i$
$\Leftrightarrow \chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $n_i = \alpha_i$.
$\Leftrightarrow$ il existe un polynôme P non nul, scindé sur $\mathbb{K}$, à racines simples tel que $P(f) = 0$
$\Leftrightarrow \mu_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples
$\Leftarrow$ f a n valeurs propres simples ou encore χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples

D'autre part,

f est trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$.